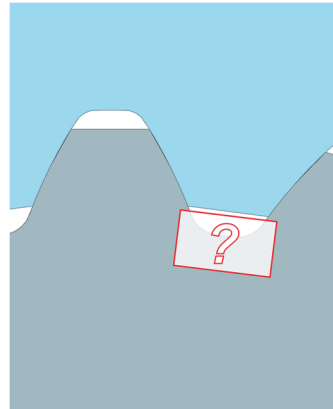


## Passverzahnungen mit elliptischer Zahnfußform

Krahl, S.; Schäfer, G.; Lohrengel, A.

*Die Zahnfußform der Welle hat entscheidenden Einfluss auf die Tragfähigkeit von Passverzahnungen. Nach gängigen Normen sind zurzeit Fußausrundungen in Abhängigkeit des Fertigungsverfahrens (DIN 5480) oder Mindestfußrundungsradien (ISO 4156) benannt, welche einer kreisförmigen Ausrundung des Fußes angelehnt sind. Mit diesen Formen geht bei größer gewählten Radien zwar eine Beanspruchungsreduzierung einher, es erfolgt aber auch ein signifikanter Verlust des Nettoquerschnitts der Welle. Um hier Abhilfe zu leisten, erscheint die elliptische Fußform als probates Mittel. Der folgende Artikel gibt einen kurzen Überblick zu möglichen Potenzialen durch diese alternative Fußform.*



*The tooth root shape of the shaft has a decisive influence on the load capacity of splined shaft-hub connections. According to current standards, foot fillets are specified depending on the manufacturing process (DIN 5480) or minimum foot radii (ISO 4156) are given, which are based on a circular rounding of the foot. Although these shapes are associated with a reduction in stress with larger radii, there is also a significant loss of the net cross-section of the shaft. To address this issue, the elliptical foot shape appears to be a viable solution. The following article provides a brief overview of the potential benefits of this alternative foot shape.*

### Einleitung

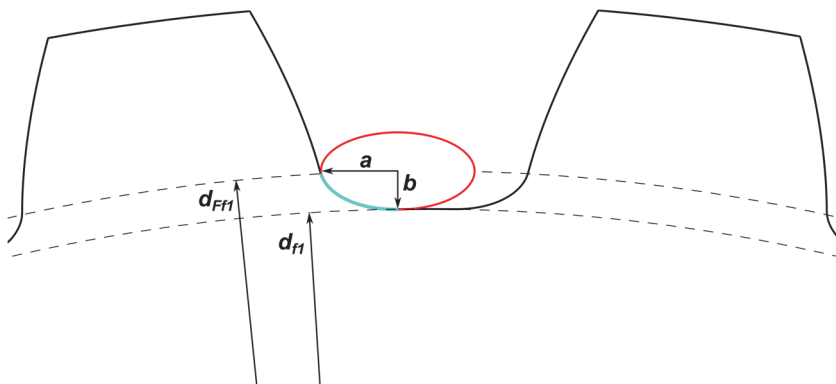
Bei den heute im Antriebsstrang geforderten Leistungsdichten kommt es bei genormten Zahnwellen- und Keilwellenverbindungen immer häufiger zum Versagen durch einen Torsionsbruch der Welle. Zumeist geht dieser von der im Zahnfuß vorhandenen Kerbe aus, sodass eine Optimierung des Zahnwellenprofils unter Ausnutzung der in den bisherigen Normen enthaltenen Freiräume, insbesondere im Zahnfuß, erforderlich ist. Zeitgleich sollte die Verbaubarkeit mit genormten Gegenstücken erhalten bleiben, um möglichst schnell einen Einzug optimierter Profilformen in die industrielle Anwendung garantieren zu können.

## Status Quo und Vorgehensweise

Zu möglichen Optimierungsansätzen auf Seiten der Passverzahnungen fanden bereits eine Reihe von Untersuchungen statt. Beispielhaft seien hier /1, 2, 3/ genannt. Als O-Ton kann zusammenfassend davon gesprochen werden, dass jeweils Zahnwellenverbindungen mit mittleren Zähnezahlen als vorteilhaft bezüglich der Drehmomentenübertragung identifizierbar sind. Zusätzlich kann durch eine Vergrößerung des Zahnfußrundungsradius auf  $\rho_f = 0,48 \cdot m$  eine gesteigerte Drehmomentkapazität realisiert werden. Die Vollausrundung des Zahnfußes führt aufgrund des stärker werdenden Einschnitts in die Welle wiederum zu einer leichten Beanspruchungserhöhung. Diesem Sachverhalt wird in /4, 5/ gegengesteuert, indem alternative Fußformen untersucht werden. Sowohl der elliptischen Fußform als auch dem nach der Methode der Zugkraftdreiecke nach Mattheck /6/ ausgestalteten Zahnfuß können kein Vorteil gegenüber der einfachen (optimierten) Verrundung zugesprochen werden.

Dem Großteil der Untersuchungen ist gemein, dass der Geometrie ein Profil nach DIN 5480 /7/ mit einem Flankenwinkel von  $\alpha = 30^\circ$  zu Grunde liegt. Lediglich in /3/ und /8/ werden weitere Flankenwinkel betrachtet. In /3/ werden diese der AFNOR /9/ und der ISO 4156 /10/ entnommen. Aufbauend auf den in /3/ geschilderten Ergebnissen wurden von Warnecke in /11/ unter Anleitung des Autors Profile mit den Flankenwinkeln  $\alpha = 20^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$  bei einem Modul  $m = 1$  mm, einer Zähnezahl  $z = 24$  und einem Durchmesser der Vollwelle von 25 mm betrachtet. Die Wellenkonturen wurden mit elliptischen Zahnfußformen versehen und hinsichtlich der Beanspruchung im Zahnfuß untersucht. Die Ergebnisse dieser numerischen Studie bilden die Grundlage für die folgenden Betrachtungen.

## Die Ellipse als Zahnfußform

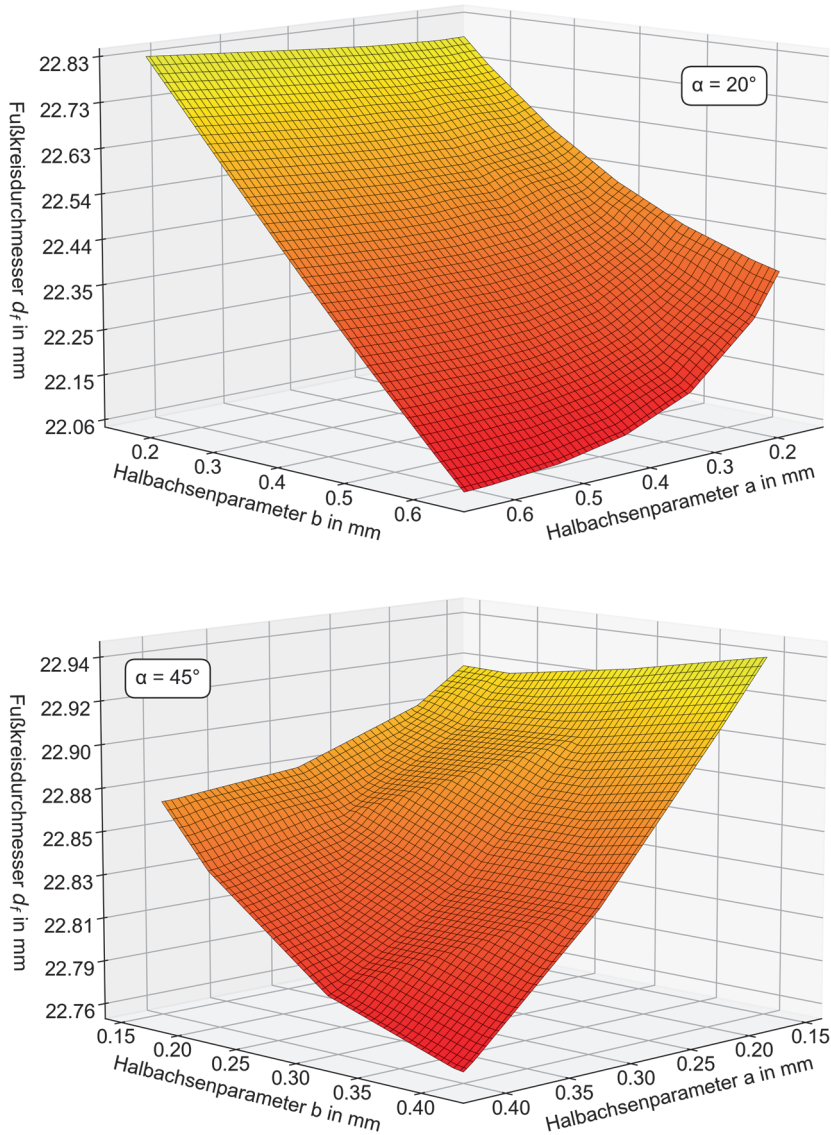


**Abbildung 1:** Elliptische Fußform und Halbachsen der Ellipse am Beispiel einer evolvierenden Passverzahnung

Die Variation der Fußform wurde in Anlehnung an /4/ so durchgeführt, dass nur unterhalb des Fußformkreisdurchmessers der Welle  $d_{Ff1}$  eine Anpassung vorgenommen wird. Damit wird gewährleistet, dass eine Paarbarkeit mit genormten Gegenstücken stets erhalten bleibt. Am Übergang von der Flanke in den Zahnfuß findet ein tangentialer Anschluss statt, wobei die Form der Ellipse über deren Halbachsenparameter  $a$  und  $b$  gesteuert werden kann, wie in Abbildung 1 zu sehen. Eine Abbildung von sowohl stehenden als auch liegenden Ellipsen wird hierdurch möglich. Durch diese Variationsmöglichkeit geht eine erhöhte Flexibilität hinsichtlich des Fußkreisdurchmesser der Welle  $d_{f1}$  einher, welche beim einfachen kreisrunden Fuß nicht vorhanden ist. Über die Form der Ellipse kann somit direkt Einfluss auf den zur Verfügung stehenden Nettoquerschnitt und damit auf das polare Widerstandsmoment der Welle genommen werden. Die Anpassung der Halbachsenparameter wurde dabei zwischen dem nach DIN 5480 für die wälzfräsende Fertigung vorgesehenen Fußrundungsradius von  $\rho_{f1} = 0,16 \cdot m$  bis hin zum für den jeweiligen Flankenwinkel als Vollverrundung anzusehenden Fußverrundungsfaktor (bei Betrachtung einer kreisförmigen Fußausrundung) vorgenommen. Aus den so abgeleiteten Geometrien kann der resultierende Fußkreisdurchmesser der Welle bestimmt werden, welcher in Abbildung 2 für die Flankenwinkel  $\alpha = 20^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$  bei Variation der Halbachsenparameter aufgetragen ist. Ins Auge sticht sofort das gegensätzliche Verhalten der Flankenwinkel bei Variation der Halbachsen. Während für das steile Profil wie zu erwarten der größte Fußkreisdurchmesser mit dem kleinsten Wert für die vertikale Halbachse und dem größten Wert für die horizontale Halbachse resultiert, ist das Verhalten beim flachen Profil genau gegensätzlich. Als Grund hierfür kann die gewählte Platzierung der Ellipse angesehen werden. Nähere Informationen hierzu finden sich in /11/. Auffällig ist zudem, dass für die steile Flanke mit  $\alpha = 20^\circ$  eine deutlich größere Bandbreite an möglichen Fußkreisdurchmessern realisierbar ist. Grund hierfür ist der flache Übergang in den Zahnfuß bei  $\alpha = 45^\circ$ . Dieser hat auch einen von Haus aus „großen“ Fußkreisdurchmesser für das flache Profil zur Folge.

Nach DIN 743 /12/ berechnet sich das polare Widerstandsmoment, welches für die Bestimmung der statischen Sicherheit benötigt wird, mit dem Bauteildurchmesser im Kerbquerschnitt. Im vorliegenden Fall entspricht dieser dem Fußkreisdurchmesser. Für den Flankenwinkel  $\alpha = 20^\circ$  kann im Vergleich zur Vollausrundung bei kreisförmigem Zahnfuß durch günstig gewählten elliptischen Fuß eine Steigerung der Sicherheit gegen bleibende Verformung um ca. 10 % erreicht werden. Beim flacheren Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  fällt der maximal erreichbare Zugewinn an Sicherheit mit ca. 2,4 % deutlich geringer aus.

Für die beiden nicht betrachteten Flankenwinkel von  $\alpha = 30^\circ$  und  $\alpha = 37,5^\circ$  nach ISO 4156 ist eine ähnliche Verhaltensweise, bei Einstufung der möglichen Fußkreisdurchmesser und der daraus ableitbaren statischen Sicherheiten zwischen den hier aufgeführten Werten zu erwarten.

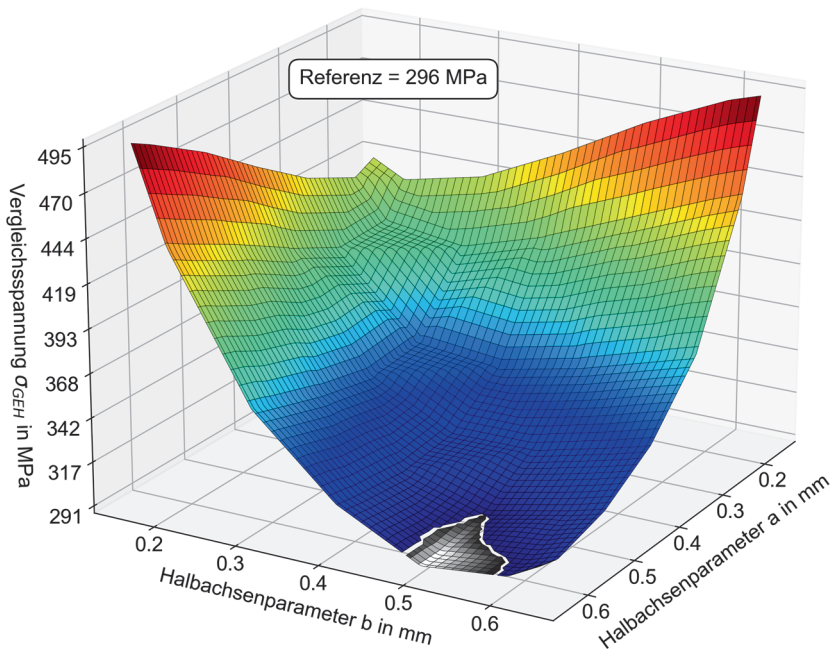


**Abbildung 2:** Resultierende Fußkreisdurchmesser bei Variation der Halbachsenparameter der Ellipse für Profile mit  $\alpha = 20^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$

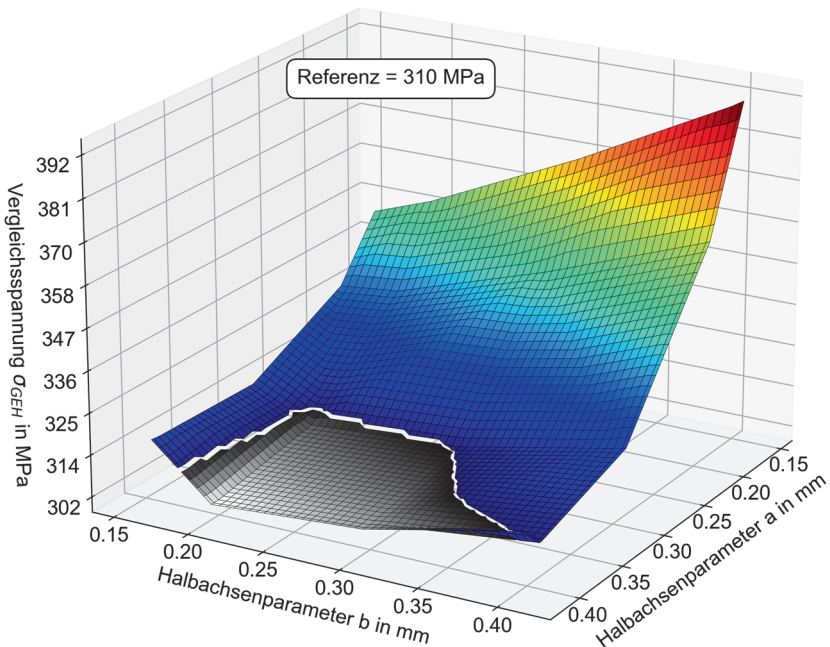
## Ergebnisse

Abbildung 3 und Abbildung 4 zeigen die Ergebnisse der numerischen Studie. Es sind die resultierenden maximalen Vergleichsspannungen nach von Mises im zugseitigen Zahnfuß der Welle aufgenommen. Zusätzlich ist jeweils eine Referenz dargestellt, welche die Beanspruchung der Welle bei optimal gewähltem kreisrunden Fuß darstellt. Die Bereiche in denen durch günstige Wahl der Halbachsenparameter eine reduzierte Beanspruchung gegenüber der Referenz vorliegt sind entsättigt dargestellt.

Für beide Flankenwinkel zeigt sich, dass hinsichtlich der Zahnfußspannung nur eine sehr geringe Reduzierung der Beanspruchung, im unteren einstelligen Prozentbereich, erreicht werden kann. Eine signifikante Tragfähigkeitssteigerung kann gerade vor dem Hintergrund der numerischen Genauigkeit also nicht beobachtet werden.



**Abbildung 3:** Vergleichsspannungen im zugseitigen Zahnfuß der Welle bei elliptischer Fußrundung am Profil mit  $\alpha = 20^\circ$  und  $m = 1$  mm; Fußrundungsradius der Referenz:  $\rho_{f1} = a = b = 0,5$  mm



**Abbildung 4:** Vergleichsspannungen im zugseitigen Zahnfuß der Welle bei elliptischer Fußrundung am Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  und  $m = 1 \text{ mm}$ ; Fußrundungsradius der Referenz:  $\rho_{f1} = a = b = 0,4 \text{ mm}$

Bezüglich der statischen Übertragungsfähigkeit und den lokalen Zahnfußspannungen kann bei der hier durchgeführten Profilloptimierung mit elliptischer Zahnfußform ein divergentes Verhalten identifiziert werden. Durch geeignete Anpassung der Halbachsen der Ellipse kann einerseits ein erhöhter Fußkreisdurchmesser und damit eine höhere statische Sicherheit gegenüber der einfachen kreisrunden Fußform erreicht werden. Andererseits zeigen die Ergebnisse zu den lokalen Zahnfußspannungen aber auch, dass für jene Profile mit hohem Fußkreisdurchmesser zumeist durch die hierfür notwendige Wahl der Halbachsenparameter eine relativ scharfe Kerbe resultiert. Diese ruft wiederum eine Spannungsüberhöhung hervor, durch welche es zu einer Reduzierung der dynamischen Tragfähigkeit kommen würde (vgl. z.B. Abbildung 3). Insbesondere beim Profil mit  $\alpha = 20^\circ$  kann dadurch mit der elliptischen Fußform keine wirkliche Beanspruchungsreduzierung gegenüber der optimalen kreisrunden Zahnfußform erzielt werden. Beim flachen Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  hingegen ist mit der Wahl der Halbachsenparameter zu  $a = 0,4 \text{ mm}$  und  $b = 0,2 \text{ mm}$  eine leichte Beanspruchungsreduzierung zu verzeichnen. Parallel dazu steigt der Fußkreisdurchmesser im Vergleich zum optimalen Profil bei kreisrundem Zahnfuß an, sodass auch eine erhöhte statische Übertragungsfähigkeit für das Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  zu erwarten ist. Generell kann festgehalten werden, dass sich für den Flankenwinkel  $\alpha = 20^\circ$  Kombinationen

anbieten, bei denen die horizontale Halbachse möglichst groß und die vertikale Halbachse etwas darunter gewählt werden, um den elliptischen Zahnfuß möglichst kerbarm zu gestalten. Beim flacheren Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  ist ebenfalls die horizontale Halbachse möglichst groß zu gestalten, während hier aber der vertikale Halbachsenparameter relativ klein gehalten werden sollte, wie aus Abbildung 4 ersichtlich.

## Zusammenfassung und Ausblick

Auf Basis der vorliegenden Ergebnisse für den Flankenwinkel  $\alpha = 20^\circ$  erscheint die Nutzung einer elliptischen Zahnfußform zunächst als wenig vorteilhaft. Es kann jedoch festgehalten werden, dass für das hier betrachtete flache Profil mit  $\alpha = 45^\circ$  eine Optimierung hinsichtlich der statischen Sicherheit und der lokalen Beanspruchung im Zahnfuß möglich ist. Gegenüber der optimierten kreisrunden Zahnausrundung (kurz vor der Vollausrundung) kann für beide Kriterien jeweils eine leichte Verbesserung prognostiziert werden.

Darüber hinausgehendes und bisher nur wenig betrachtetes Potenzial zur Tragfähigkeitssteigerung bieten Fußformen, welche z.B. der bionischen Optimierung entstammen. Denkbar sind hier vor Allem genetische und topologische Optimierungen des Zahnfußes. Zu bevorzugen sind dabei zunächst die genetischen Optimierungsansätze, welche bereits bei den Stirnradverzahnungen ihre Stärke unter Beweis stellen konnten /13/. Aktuell geplante Untersuchungen sollen daher die damit nutzbaren Tragfähigkeitsreserven bei den Passverzahnungen weitergehend analysieren.

## Literatur

- /1/ Nsenga Biansompa, E.; Schäfer, G.: Zahnwellenberechnung, FVA-Berechnungsrichtlinie für Zahnwellen-Verbindungen, Forschungsvorhaben Nr. 591 I der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., (591-FVA-I), 2015 (FVA-Heft 1139)
- /2/ Mörz, F.; Selzer, M.; Wild, J.: Abschlussbericht Optimierung des Zahnwellenprofils primär zur Drehmomentübertragung unter Berücksichtigung wirtschaftlicher Fertigungsmöglichkeiten. Forschungsvorhaben Nr. 742 I der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., (AiF 18406 BG), Frankfurt/Main, 2018 (FVA-Heft 1316)
- /3/ Krahl, S.; Selzer, M.: Zahnwellen-Optimierung mit spezieller Berücksichtigung fertigungstechnischer und einsatzspezifischer Randbedingungen, nicht veröffentlichter Sachstandsbericht zum Forschungsvorhaben Nr. 742 II der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (AiF 22776 BG)“. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e. V., 8. November 2023
- /4/ Schäfer, G.: Betrachtungen der Zahnfußausrundung von Passverzahnungen; Institutsmitteilungen Nr. 40, IMW Clausthal, S.23-28, 2015
- /5/ Schäfer, G.: Kerbspannungen von Passverzahnungen auf Hohlwellen; Institutsmitteilungen Nr. 41, IMW Clausthal, S.21-28, 2016
- /6/ Prof. Dr. Claus Mattheck: Verborgene Gestaltungsgesetze der Natur, Verlag Forschungszentrum Karlsruhe, 2006

- /7/ DIN 5480-1:2015-03, Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser – Teil 1: Grundlagen
- /8/ Wild, J.: Optimierung der Tragfähigkeit von Zahnwellenverbindungen, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2022, <https://doi.org/10.1007/978-3-658-36961-3>
- /9/ Standard AFNOR NF E22-141, 01/08/1985. Cylindrical involute Splines
- /10/ Norm ISO 4156-1:2009-04: Passverzahnungen mit Evolventenflanken -Metrischer Modul, flankenzentriert — Teil 1: Grundlagen
- /11/ Warnecke, B.: Erstellung eines parametrischen FE-Modells zur Untersuchung optimierter Zahnfußgeometrien an Welle-Nabe-Verbindungen, unveröffentlichte Forschungsarbeit, Clausthal-Zellerfeld, 2024
- /12/ DIN 743-2:2012-12, Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen - Teil 1: Grundlagen
- /13/ Billenstein, D.; Pollaschek, J.: Abschlussbericht FE-Tragfähigkeitsoptimierung Zahnfuß – Fertigungsgerechte, automatisierte FE-Optimierung der Zahnfußtragfähigkeit von Stirnrädern. Forschungsvorhaben Nr. 709 II der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., (IGF 19233 N), Frankfurt/Main, 2021 (FVA-Heft 1423)